SUBJECT: 1

الفصل الأول:

النظرية العامة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n

1- مفاهيم أساسية: نعلم بأن المعادلة التفاضلية هي علاقة بين المتغير التابع y والذي يتغير المستقل x والمشتقات العليا للمتغير، وهذه المتغيرات بالنسبة للمتغير المستقل x. أي أن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الشكل:

$$F(x, y, y', \ldots\ldots y^{(n)}, \ldots) = 0 \quad \boxed{1}$$

نعلم بأن المعادلة التفاضلية تدعى بمعادلة تفاضلية من الرتبة n إذا ظهرت في هذه المعادلة المشتقة من الرتبة n؛ أي أن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة n هي:

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}) = 0 \quad \boxed{2}$$

تعريف: نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة n أنها معادلة تفاضلية **خطية** من الرتبة n إذا وفقط إذا ظهر المتغير التابع y والمشتقات العليا لهذا المتغير التابع (y) **فرادى** (دون حاصل جداء) وكلٌ مرفوع للأس واحد أي أن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هو:

$$\boxed{3}\; P_n(x).y^{n} + P_{n-1}(x).y^{n-1} + \ldots\ldots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x)$$

وحيث $P_0(x)$ و $P_1(x), \ldots\ldots, P_{n-1}(x), P_n(x)$, $f(x)$ هي دوال تتعلق بالمتغير المستقل x

- إذا كانت الدوال المعاملات $P_0, P_1, \ldots\ldots, P_{n-1}, P_n$ جميعها ثوابت عددية عندئذٍ تدعى المعادلة $\boxed{3}$ معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n **ذات معاملات ثابتة**.

(y^3 القوة (الأس) — $y^{(3)} = y'''$ رتبة الاشتقاق)

- أما إذا كانت أحد هذه المعاملات على الأقل يتعلق بالمتغير المستقل x عندئذٍ ندعو المعادلة $\boxed{3}$ معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n **ذات معاملات متغيرة**.

أمثلة توضيحية:

1- معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير خطية لوجود الجداء فيها:

$$y'' + x.y.y' = \sin x$$

SUBJECT:

-2- معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة غير خطية، لأن y' مرفوع للاس (2)

$$y''' + y'^2 = 0$$

-3- معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير خطية لوجود دالة $\sin y$ وهي دالة غير خطية

$$y'' + x \cdot \sin y = e^x$$

-4- معادلة من الرتبة الثانية خطية ذات معاملات متغيرة.

$$x^2 y'' + 2x y' + y = x^3$$

-5- معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثالثة ذات معاملات ثابتة.

$$y''' + 8y'' + 6y' + y = 0$$

-6- معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات متغيرة.

$$x(1 - \ln x) y'' + x y' + (1 - \ln x) y = (1 - \ln x)^2$$

لنفرض أن الدوال المعاملات في المعادلة [3] هي دوال مستمرة على المجال $I = (a, b)$

ونفرض أن $P_n(x) \neq 0$ ؛ $\forall x \in I$ عندئذٍ المعادلة [3] تكتب على الصورة الآتية:

$$[4] \ldots y^{n} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = F(x)$$

بحيث أن: $a_j = \frac{P_j(x)}{P_n(x)}$ ؛ $F(x) = \frac{f(x)}{P_n(x)}$ ؛ $j = 1, 2, \ldots, n-1$

- إذا كان $F(x) = 0$ $\forall x \in I$ عندئذٍ المعادلة [4] تكتب بالشكل:

$$y^{n} + a_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \quad [5]$$

وهذه المعادلة تدعى المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة المناظرة للمعادلة [4]

- إذا كان $F(x) \neq 0$ عندئذٍ ندعو المعادلة التفاضلية: معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة

AL DOUHA

SUBJECT:

بناءً على هذا التعريف نلاحظ بأن المعادلة [5] هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة وأن المعادلتين [4] و [6] هي معادلة خطية غير متجانسة.

خواص المعادلات التفاضلية الخطية:

الخاصة الأولى: المعادلتان التفاضليتان الخطيتان [4] أو [5] (المتجانسة والغير متجانسة) تحافظ على خطيتها عند إجراء تغيير بالمتغير المستقل x من الشكل $x = \psi(t)$ حيث أن $\psi(x)$ دالة معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق من مراتب عليا على المجال (t_0, t_1) و $\psi'(t) \neq 0$ وذلك

$$\forall t \in (t_0, t_1) \; ; \; t_0 = \psi^{-1}(a) \; ; \; t_1 = \psi^{-1}(b)$$

مثال توضيحي: لتكن لدينا المعادلة:

$$xy'' - y' - 4x^3 y = 0$$

لو فرضنا أن $x = \sqrt{t}$ أي أن $\psi(t) = \sqrt{t}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

وبما أن $x = \sqrt{t} \Leftarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ $\quad 2\sqrt{t} = \frac{dt}{dx}$

ومنه $y' = 2\sqrt{t} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dy}{dt} + 2\sqrt{t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right) 2\sqrt{t} = 2\frac{dy}{dt} + 4t \frac{d^2y}{dt^2}$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أن:

$$\sqrt{t}\left(2\frac{dy}{dt} + 4t\frac{d^2y}{dt^2}\right) - 2\sqrt{t} \cdot \frac{dy}{dt} - 4t\sqrt{t}\, y = 0$$

$\div \sqrt{t}$

$$2\frac{dy}{dt} + 4t\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 4ty = 0 \Rightarrow 4t\frac{d^2y}{dt^2} - 4ty = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0}$$

SUBJECT: / /

الخاصة الثانية: المعادلتان التفاضليتان 4 أو 5 (خطية ذات معاملات ثابتة ومتغيرة) تحافظ على خطيتها عند إجراء تغيير بالمتغير التابع y من الشكل $y = \alpha(x) Z + \beta(x)$ بحيث أن Z هو المتغير التابع الجديد و الدالتان $\alpha(x), \beta(x)$ دالتان معرفتان ومستمرتان على المجال $I = (a, b)$ وقابلتان للاشتقاق n مرة متتالية ((وفي حالة خاصة بأن التغيير السابق يأخذ الشكل « $y = \alpha(x) Z$ » أي أن $\beta(x)$ يمكن أن تكون صفر أما $\alpha(x)$ فلا يمكن؟

وإذا أخذنا $\alpha(x)$ من الشكل:

$$\alpha(x) = e^{-\frac{1}{n}\int a_{n-1}(x)\,dx}$$

عندئذٍ يكون التحويل $y = e^{-\frac{1}{n}\int a_{n-1}(x)dx} Z$ وهو التحويل الذي يحافظ على خطية المعادلة التفاضلية ويحذف المشتقة من الرتبة $(n-1)$ ← فائدة هذا تحويل.

مثال: لتكن لدينا المعادلة $x^2 y'' - 4x y' + (6 - x^2) y = 0$ وبإجراء التغيير المناسب نحذف المشتقة الأولى أي يجب أن يكون شكل المعادلة

$y'' - \frac{4}{x} y' - (\frac{6}{x^2} - 1) y = 0$ أي أن أمثال أعلى رتبة

التحويل الذي يحذف المشتقة من الرتبة $n-1$ هو من الشكل:

$y = ~~e^{-\frac{1}{2}\int -\frac{4}{x} dx} . Z~~ = e^{\frac{2}{2}\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x^2} . Z = x^2 . Z$

$y = e^{-\frac{1}{2}\int -\frac{4}{x} dx} . Z$

أي أن التحويل الذي يحذف المشتقة من الرتبة الأولى هو $y = x^2 . Z$

$y' = 2xZ + x^2 Z' \longrightarrow y'' = 2Z + 4xZ' + x^2 Z''$

نعوض y و y' و y'' بالمعادلة التفاضلية:

$x^4 Z'' + 4x^3 Z' + 2x^2 Z - 8x^2 Z - 4x^3 Z' + (6 - x^2) x^2 Z = 0$

$x^4 . Z'' + 2x^2 . Z - 8x^2 . Z + 6x^2 . Z - x^4 . Z$

$x^4 . Z'' - x^4 Z = 0 \longrightarrow Z'' - Z = 0$

هي معادلة ذات ~~متغ~~ معاملات ثابتة تم حذف المشتقة من الرتبة الأولى.

SUBJECT:

. موجز في الساحة العقدية :

. نعلم بأن الشكل الجذري للعدد العقدي $\boxed{Z = x + yi}$

. ندعو x قسم حقيقي للعدد العقدي ونرمز له ب $Re\, Z = x$

. ندعو y قسم تخيلي للعدد العقدي ونرمز له ب $Im\, Z = y$

. يتساوى عددان عقديان بالصورة الجبرية إذا وفقط إذا كان .

$Z_1 = x_1 + y_1 i \; ; \; Z_2 = x_2 + y_2 i$: إذا كان $\boxed{y_1 = y_2 \quad \wedge \quad x_1 = x_2}$

. عملية الجمع

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

. عملية الضرب

$$Z_1 . Z_2 = (x_1 . x_2 - y_1 . y_2) + i(x_1 . y_2 + x_2 . y_1)$$

إذا كان $Z = x + yi$ فالعدد العقدي المرافق هو $\bar{Z} = x - yi$

★ يكون العدد العقدي حقيقي إذا كان $Im\, Z = 0$ أو إذا كان $Z = \bar{Z}$

أو إذا كان $Im\, Z = 0$ / $Im\, Z = \pi$ (أي صمحوا العدد العقدي)

عملية الطرح :

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

. عملية القسمة : $Z_2 . \bar{Z}_2 = |Z_2|^2 = x^2 + y^2$

$$★ \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 . \bar{Z}_2}{Z_2 . \bar{Z}_2} = \frac{Z_1 . \bar{Z}_2}{|Z_2|^2} \; ; \; |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

إن Z_2^{-1} هو المعكوس الضربي للعدد $Z_2 = x_2 + y_2 i$ و

$$★ \quad \frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 . Z_2^{-1}$$

$$Z_2^{-1} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال توضيحي : أوجد ناتج ; $\frac{1+i}{1-i}$

• $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1+(-1)^2} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{1-1+2i}{2} = i$

أو

• $\frac{1+i}{1-i} = (1+i)(1-i)^{-1} = (1+i)\frac{(1+i)}{2} = i$

$$(1-i)^{-1} = \frac{1}{2} - i\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1+i}{2}$$

- إذا كان $Z = x + yi$ فالمعكوس الضربي له هو $Z^{-1} = u + vi$

$\boxed{Z \cdot Z^{-1} = 1} \longrightarrow (x + yi)(u + vi) = 1$

$$(xu - yv) + (yu + xv)i = 1 + i0$$

واعتماداً على تساوي عددين عقديين ينتج أن :

$xu - yv = 1$

$yu + xv = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$$

(يكون للمعادلة حل وحيد إذا كان محدد الأمثال لا يساوي الصفر.)

وبما أن محدد الأمثال لا يساوي الصفر فالجملة المعادلتين حل وحيد هو :

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow u = \frac{x}{\Delta} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow v = \frac{-y}{\Delta} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

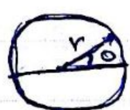
- ليكن $Z = x + yi$

وإذا كان (r, θ) هما الإحداثيات القطبية للنقطة (x, y) عندئذٍ

$x = r \cdot \cos\theta$ ؛ $y = r \cdot \sin\theta$ أي أن $\boxed{Z = r \cdot \cos\theta + i(r \cdot \sin\theta)}$

وهو الشكل القطبي للعدد العقدي





$$Z = x + yi$$
$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$Z = r \cdot e^{i\theta}$$

ندعو r طويلة العدد العقدي وهو مقدار موجب.

$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

SUBJECT:

ملاحظة: ليس للعدد العقدي الصفري تمثيل قطبي «أي r لا يمكن أن تكون صفر»

$$Z_1 . Z_2 = r_1 . r_2 = [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ضرب طويلتين جمع معقوفتين

بالإحداثيات القطبية

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} = [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

قسمة طويلتين وطرح المعقوفتين

إذا رمزنا للعدد العقدي $e^{i\theta}$ بالشكل $\cos\theta + \sin\theta i$ أي أنه:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ أي وهي علاقة أولر

ومنه فإن: $\boxed{Z = r . e^{i\theta}}$ وهو الشكل الأسي للعدد العقدي.

كل دالة من الشكل: $Z(t) = X(t) + i y(t)$ ندعوها دالة متغير حقيقي ذات قيم عقدية

مثال:

$$e^{3xi} = \cos 3x + i \sin 3x$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow e^{i.3.\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i . \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تكون الدالة السابقة دالة قابلة للاشتقاق إذا كان كلاً من: $x = x(t)$, $y = y(t)$

كل منهما دالة قابلة للاشتقاق $Z'(t) = x'(t) + y'(t) i$